

[6] E を 2 次の単位行列, O を 2 次の零行列とすると,

ケ-リー-ハミルトンの定理より

$$A^2 - 2A + E = O \Leftrightarrow (A - E)^2 = O$$

$$B = A - E \text{ とおくと, } B^2 = O. A = B + E \text{ より}$$

$$A^n = (B + E)^n$$

$$= B^n + nC_1 B^{n-1} \cdot E + \dots + nC_{n-1} B \cdot E + E \quad (\because \text{二項定理})$$

$$= nB + E.$$

$$= n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n \end{pmatrix}$$

よって $P_n(x_n, y_n)$ は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$$

② $(10, 10)$ と P_n との距離は

$$\sqrt{(n+1-10)^2 + (2n+1-10)^2}$$

$$= \sqrt{5n^2 - 54n + 162}$$

$$= \sqrt{5\left(n^2 - \frac{54}{5}n\right) + 162}$$

$$= \sqrt{5\left(n - \frac{27}{5}\right)^2 + 162 - \left(\frac{27}{5}\right)^2}$$

よって、最小値をとるときは、 $n = \frac{27}{5} = 5.4$ より、

$n = 5$ のとき。